**Математическое моделирование**

**1. Модель «хищник—жертва»**

Модель «хищник—жертва» (также известная как модель Лотки-Вольтерры) описывает взаимодействие двух популяций, где одна выступает в роли хищника, а другая — жертвы. Эта модель представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

dx/dt = αx - βxy

dy/dt = -γy + δxy

где:

• x(t) — численность популяции жертв

• y(t) — численность популяции хищников

• α — коэффициент естественного прироста популяции жертв (при отсутствии хищников) • β — коэффициент эффективности охоты хищников

• γ — коэффициент естественной смертности хищников (при отсутствии жертв)

• δ — коэффициент эффективности воспроизводства хищников

**Свойства модели:**

1. **Стационарные точки:**

◦ Тривиальное равновесие (0, 0) — обе популяции вымирают

◦ Нетривиальное равновесие (γ/δ, α/β) — устойчивое сосуществование популяций

2. **Периодические решения:**

◦ Решения системы представляют собой замкнутые кривые на фазовой плоскости

◦ Численности популяций колеблются периодически

◦ Отсутствует асимптотическая устойчивость — малые возмущения меняют амплитуду колебаний

3. **Качественное поведение системы:**

◦ При росте популяции жертв растет и популяция хищников

◦ Увеличение числа хищников приводит к уменьшению числа жертв

◦ Уменьшение числа жертв приводит к уменьшению числа хищников

◦ Уменьшение числа хищников приводит к росту популяции жертв

**Модификации базовой модели:**

1. **Модель с учетом емкости среды:**

dx/dt = αx(1-x/K) - βxy

dy/dt = -γy + δxy

где K — емкость среды для популяции жертв.

2. **Модель с учетом насыщения хищника:**

dx/dt = αx - βxy/(1+hx)

dy/dt = -γy + δxy/(1+hx)

где h — константа, характеризующая время обработки добычи.

**2. Понятие осциллятора, нелинейный осциллятор, фазовый портрет и** **фазовая траектория**

**Понятие осциллятора**

**Осциллятор** — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени. В математическом моделировании осцилляторы обычно описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.

**Линейный осциллятор** описывается уравнением:

d²x/dt² + ω²x = 0

или в случае затухающих колебаний:

d²x/dt² + 2β·dx/dt + ω²x = 0

где:

• x — отклонение от положения равновесия

• ω — собственная частота колебаний

• β — коэффициент затухания

**Нелинейный осциллятор**

**Нелинейный осциллятор** — осциллятор, в уравнении которого присутствуют нелинейные функции от переменной x или её производных.

Примеры нелинейных осцилляторов:

**Маятник (осциллятор Дуффинга):**

d²x/dt² + 2β·dx/dt + ω²x + αx³ = 0, где α характеризует нелинейность системы.

**Осциллятор Ван дер Поля:**

d²x/dt² - μ(1-x²)·dx/dt + x = 0, где μ > 0 — параметр, характеризующий нелинейность затухания.

Особенности нелинейных осцилляторов:

• Зависимость частоты колебаний от амплитуды

• Возможность возникновения хаотических колебаний

• Наличие множества устойчивых и неустойчивых режимов

• Возможность самовозбуждения колебаний

**Фазовый портрет и фазовая траектория**

**Фазовое пространство** — многомерное пространство, координатами которого являются переменные, полностью описывающие состояние системы. Для системы второго порядка фазовое пространство двумерно и обычно выбирается в координатах (x, dx/dt).

**Фазовая траектория** — кривая в фазовом пространстве, описывающая изменение состояния системы с течением времени. Каждая точка фазовой траектории соответствует определенному состоянию системы.

**Фазовый портрет** — совокупность фазовых траекторий системы при различных начальных условиях. Фазовый портрет дает наглядное представление о качественном поведении системы.

Особые точки на фазовом портрете:

1. **Устойчивые узлы** — точки, к которым стремятся соседние траектории

2. **Неустойчивые узлы** — точки, от которых удаляются соседние траектории

3. **Седловые точки** — точки, к которым стремятся траектории с определенных направлений и от которых

удаляются в других направлениях

4. **Фокусы** — точки, вокруг которых закручиваются траектории

5. **Центры** — точки, вокруг которых траектории образуют замкнутые кривые

**3. Логистическое уравнение, устойчивые и неустойчивые точки** **равновесия**

**Логистическое уравнение**

**Логистическое уравнение** — одно из базовых уравнений в экологии и демографии, описывающее рост популяции с учетом ограниченности ресурсов:

dx/dt = rx(1-x/K)

или в дискретной форме (логистическое отображение):

x\_{n+1} = rx\_n(1-x\_n)

где:

• x — размер популяции

• r — коэффициент роста (мальтузианский параметр)

• K — емкость среды (максимально возможная численность популяции)

**Устойчивые и неустойчивые точки равновесия**

**Точка равновесия** (стационарная точка) — значение переменной x, при котором dx/dt = 0, то есть система находится в состоянии равновесия.

Для логистического уравнения существуют две точки равновесия:

1. x = 0 (тривиальное равновесие)

2. x = K (нетривиальное равновесие)

**Устойчивость точки равновесия** определяется поведением системы при небольших отклонениях от равновесия:

1. **Устойчивая точка равновесия** — точка, к которой система возвращается после малых отклонений 2. **Неустойчивая точка равновесия** — точка, от которой система удаляется даже при малых отклонениях

Для непрерывного логистического уравнения:

• При r > 0 точка x = 0 является неустойчивой

• При r > 0 точка x = K является устойчивой

Для дискретного логистического отображения поведение системы сложнее:

• При 0 < r < 1 точка x = 0 устойчива, а x = 1 неустойчива

• При 1 < r < 3 точка x = 0 неустойчива, а x = (r-1)/r устойчива

• При r > 3 возникают бифуркации и хаотическое поведение:

◦ 3 < r < 3.57 — система колеблется между несколькими состояниями (периодический режим)

◦ r > 3.57 — система демонстрирует хаотическое поведение

**4. Стационарные и нестационарные состояния динамической системы**

**Стационарные состояния**

**Стационарное состояние** (равновесное состояние) — состояние динамической системы, в котором все переменные системы не меняются со временем.

Математически для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

dx₁/dt = f₁(x₁, x₂, ..., xₙ)

dx₂/dt = f₂(x₁, x₂, ..., xₙ)

...

dxₙ/dt = fₙ(x₁, x₂, ..., xₙ)

стационарное состояние x\* = (x₁\*, x₂\*, ..., xₙ\*) определяется условиями:

f₁(x₁\*, x₂\*, ..., xₙ\*) = 0

f₂(x₁\*, x₂\*, ..., xₙ\*) = 0

...

fₙ(x₁\*, x₂\*, ..., xₙ\*) = 0

Основные характеристики стационарных состояний:

1. **Устойчивость** — способность системы возвращаться к стационарному состоянию после малых возмущений

2. Область притяжения — множество начальных состояний, из которых система стремится к данному стационарному состоянию

3. Характер устойчивости — асимптотическая устойчивость, устойчивость по Ляпунову и др.

**Нестационарные состояния**

**Нестационарное состояние** — состояние динамической системы, в котором хотя бы одна переменная системы меняется со временем.

Типы нестационарных состояний:

**Переходные процессы** — временное поведение системы при переходе от одного стационарного состоянияк другому

**Периодические колебания** — регулярное повторение состояний системы через определенные промежутки времени

**Квазипериодические колебания** — колебания с несколькими несоизмеримыми частотами

**Хаотические колебания** — нерегулярные колебания, чувствительные к начальным условиям

**Устойчивость стационарных состояний**

Для определения устойчивости стационарного состояния используют:

**1. Линеаризацию** — анализ поведения системы вблизи стационарной точки путем аппроксимации нелинейной системы линейной

2. **Метод функций Ляпунова** — построение специальных функций, характеризующих "энергию"отклонения от равновесия

3. **Принцип устойчивости линейного приближения** — если линеаризованная система асимптотически устойчива, то и нелинейная система асимптотически устойчива вблизи стационарной точки

Для линеаризованной системы устойчивость определяется собственными значениями матрицы Якоби:

\* Если все собственные значения имеют отрицательные действительные части, то стационарное состояние асимптотически устойчиво

\* Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную действительную часть, то стационарное состояние неустойчиво

**5. Динамическая система. Стационарные и нестационарные состояния** **динамической системы. Классификация стационарных точек.**

**Динамическая система**

**Динамическая система** — математическая модель, описывающая эволюцию состояния системы с течением времени в соответствии с определенным законом.

Формально динамическая система задается:

• Фазовым пространством X (множеством всех возможных состояний системы)

• Параметром времени t (непрерывным или дискретным)

• Законом эволюции φ, определяющим состояние системы в момент времени t

Основные типы динамических систем:

**Непрерывные системы** — описываются дифференциальными уравнениями dx/dt = f(x, t), где x ∈ X — состояние системы, t — время

**Дискретные системы** — описываются отображениями x\_{n+1} = F(x\_n), где x\_n — состояние системы на n-м шаге

**Классификация стационарных точек**

Стационарные точки двумерных динамических систем можно классифицировать по собственным значениям матрицы Якоби линеаризованной системы.

Для системы:

dx/dt = f(x, y)

dy/dt = g(x, y)

матрица Якоби в точке (x₀, y₀) имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
| J = [ ∂f/∂x | ∂f/∂y ] |
| [ ∂g/∂x | ∂g/∂y ] |

где частные производные вычисляются в точке (x₀, y₀).

Классификация стационарных точек:

1. **Устойчивый узел**

◦ Собственные значения λ₁, λ₂ действительные и отрицательные

◦ Траектории стремятся к стационарной точке без колебаний

2. **Неустойчивый узел**

◦ Собственные значения λ₁, λ₂ действительные и положительные

◦ Траектории удаляются от стационарной точки без колебаний

3. **Седло**

◦ Собственные значения λ₁, λ₂ действительные и разных знаков

◦ Существуют две траектории, стремящиеся к точке, и бесконечно много траекторий, удаляющихся от неё

4. **Устойчивый фокус**

◦ Собственные значения λ₁, λ₂ комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью

◦ Траектории закручиваются вокруг точки, приближаясь к ней

5. **Неустойчивый фокус**

◦ Собственные значения λ₁, λ₂ комплексно-сопряженные с положительной действительной частью

◦ Траектории закручиваются вокруг точки, удаляясь от неё

6. **Центр**

◦ Собственные значения λ₁, λ₂ чисто мнимые

◦ Траектории образуют замкнутые кривые вокруг точки

7. **Вырожденные случаи**

◦ Когда одно или оба собственных значения равны нулю

◦ Требуют дополнительного анализа

**6. Понятие динамического хаоса**

**Динамический хаос** — явление, при котором поведение нелинейной динамической системы выглядит случайным, несмотря на то, что система является детерминированной.

**Основные свойства хаотических систем:**

**Чувствительность к начальным условиям** (эффект бабочки) — малые различия в начальных условиях приводят со временем к значительным различиям в траекториях

**Непредсказуемость долгосрочного поведения** — невозможность точного прогнозирования состояния системы на длительные промежутки времени

**Топологическое перемешивание** — область любой формы в фазовом пространстве со временем распространяется на всё фазовое пространство

**Наличие странных аттракторов** — множеств в фазовом пространстве, к которым стремятся траектории и которые имеют фрактальную структуру

**Математические признаки хаоса:**

**1. Положительная ляпуновская экспонента** — количественная мера чувствительности к начальным условиям

**2. Фрактальная размерность аттрактора** — дробная размерность, характеризующая структуру аттрактора

**3. Сложная периодическая структура** — наличие бесконечного количества неустойчивых периодических орбит

**Примеры хаотических систем:**

Логистическое отображение при r > 3.57:

x\_{n+1} = rx\_n(1-x\_n)

**Система Лоренца** — система из трех дифференциальных уравнений: dx/dt = σ(y-x)

dy/dt = x(r-z) - y

dz/dt = xy - βz

где σ, r, β — параметры системы (хаос наблюдается при σ = 10, β = 8/3, r = 28)

**Система Рёсслера:**

dx/dt = -(y+z)

dy/dt = x + ay

dz/dt = b + z(x-c)

где a, b, c — параметры системы

**Отображение Эно:**

x\_{n+1} = 1 - ax\_n² + y\_n

y\_{n+1} = bx\_n

где a, b — параметры отображения

**Практическое значение хаоса:**

Фундаментальное ограничение предсказуемости — понимание принципиальных ограничений долгосрочных прогнозов в сложных системах

**1. Генераторы псевдослучайных чисел** — использование хаотических систем для генерации последовательностей, обладающих статистическими свойствами случайных

2. **Криптография** — применение хаотических систем для шифрования данных

3. **Управление хаосом** — разработка методов стабилизации хаотических систем

**7. Модель конкуренции. Внутривидовая конкуренция. Межвидовая** **конкуренция. Популяционные волны.**

**Модель конкуренции**

**Модель конкуренции** — математическая модель, описывающая взаимодействие популяций, конкурирующих за ограниченные ресурсы.

**Внутривидовая конкуренция**

**Внутривидовая конкуренция** — конкуренция между особями одного вида за ограниченные ресурсы (пищу, территорию, свет и т.д.).

Базовая модель внутривидовой конкуренции — логистическое уравнение:

dx/dt = rx(1-x/K)

где:

• x — численность популяции

• r — коэффициент естественного прироста

• K — емкость среды

Особенности внутривидовой конкуренции:

1. Ограничение роста популяции при приближении к емкости среды

2. Саморегуляция численности популяции

3. Зависимость скорости роста от плотности популяции

**Межвидовая конкуренция**

**Межвидовая конкуренция** — конкуренция между особями разных видов за общие ограниченные ресурсы.

Классическая модель межвидовой конкуренции — модель Лотки-Вольтерры для конкурирующих видов:

dx/dt = r₁x(1-x/K₁-αy/K₁)

dy/dt = r₂y(1-y/K₂-βx/K₂)

где:

• x, y — численности конкурирующих популяций

• r₁, r₂ — коэффициенты естественного прироста

• K₁, K₂ — емкости среды для каждого вида

• α, β — коэффициенты конкурентного воздействия одного вида на другой

**Принцип конкурентного исключения Гаузе:** два вида не могут сосуществовать в одной экологической нише, если они конкурируют за одни и те же ограниченные ресурсы.

Возможные исходы межвидовой конкуренции:

**Вымирание одного вида** — если один вид более эффективен в использовании ресурсов 2. **Сосуществование** — если виды имеют разные экологические ниши или конкуренция слабая 3. **Циклические колебания** — в некоторых моделях с временными задержками

**Популяционные волны**

**Популяционные волны** (волны жизни) — пространственно-временные колебания численности популяции.

Основные типы популяционных волн:

**Бегущие волны** — распространение популяции в пространстве, описываемое уравнением типа Фишера:

∂u/∂t = D∂²u/∂x² + ru(1-u/K), где D — коэффициент диффузии, характеризующий скорость распространения особей в пространстве

**Автоволны** — самоподдерживающиеся волны в активных средах, которые не затухают со временем

**Волны численности** — периодические колебания численности популяции, наблюдаемые в разных точках ареала со сдвигом по фазе

Причины возникновения популяционных волн:

1. **Внутренние факторы**:

◦ Возрастная структура популяции

◦ Генетические механизмы регуляции

◦ Поведенческие особенности

2. **Внешние факторы**:

◦ Климатические изменения

◦ Взаимодействие с другими видами (хищничество, паразитизм)

◦ Антропогенное воздействие

Математическое описание популяционных волн обычно требует использования дифференциальных уравнений в частных производных, учитывающих как временную, так и пространственную динамику популяции.